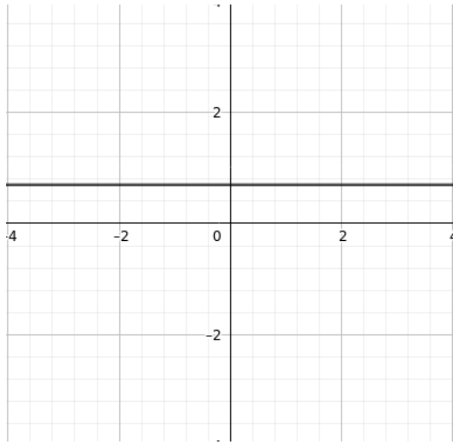
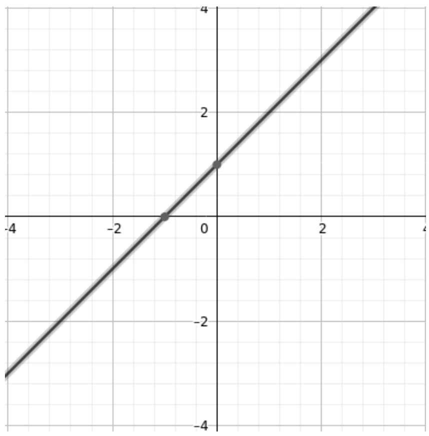
MODELITZACIÓ DE FUNCIONS

Aquest document consta de varies funcions genèriques que poden servir de model per concretar la vostra funció.



FUNCIÓ CONSTANT: $f(x) = k$

Si heu escollit una funció constant, no necessiteu cap punt. Simplement heu d'escollir quin valor voleu per la constant k.



FUNCIÓ LINEAL: $f(x) = mx + n$

Si heu escollit una funció lineal, heu d'escollir dos punts. Aquests dos punts són els que determinaran la pendent m i l'origen a.

Si tinguessim aquests punts: $A = (0, 21)$ i $B = (151.05, 5)$, on: $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$.

Per calcular la pendent, hem de fer:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

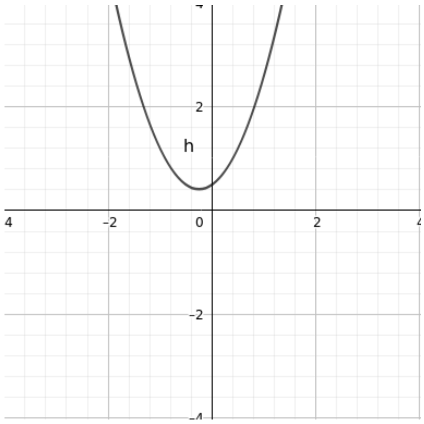
Substituim els valors:

$$m = \frac{5 - 21}{151.05 - 0} = \frac{-16}{151.05} = -0.105925$$

Ja tenim el valor de la pendent m. Ara hem de calcular la 'a' de la funció lineal. Com ho fem? Molt fàcil, substituïm qualsevol dels dos punts a l'equació.

$$A = (0, 21)$$
$$m = -0.105925$$
$$y = mx + a$$
$$21 = -0.105925 \cdot 0 + a$$
$$a = 21$$

Per tant la nostra funció quedaría:
$y = -0.105925x + 21$



FUNCIÓ QUADRÀTICA: $y = ax^2 + bx + c$
Si heu escollit una funció quadràtica, heu de d'escollir 3 punts. Un dels tres punts que triarem sempre serà el d'inici (0,21). I els altres dos, agafarem un de mitja taula i un de cap al final. Així doncs, volem trobar la funció quadràtica que passa pels 3 punts.
Substituïm aquests tres punts a la fórmula general $y = ax^2 + bx + c$ i obtenim tres equacions lineals (tres rectes!).
Si tinguessim aquests punts: $(0, 21), (33, 13), (70, 6)$

$$\begin{aligned} (0,21) &\rightarrow 21 = c \\ (33,13) &\rightarrow 13 = 1089a + 33b + c \\ (70,6) &\rightarrow 6 = 4900a + 70b + c \end{aligned}$$

D'això en diem sistema d'equacions, concretament, en diem sistema de 3 equacions i 3 incògnites que, en general, són encara massa difícils per nosaltres amb les eines matemàtiques que coneixem. Tot i així, farem un petit truc per simplificar el problema.
Substituïm la primera equació en les altres dues equacions, de manera que ens queda:

$$\begin{aligned} 13 &= 1089a + 33b + 21 \\ 6 &= 4900a + 70b + 21 \end{aligned}$$

I simplificant,

$$\begin{aligned} -8 &= 1089a + 33b \\ -15 &= 4900a + 70b \end{aligned}$$

Fixeu-vos, l'hem convertit en un sistema de 2 equacions i 2 incògnites, i això si que està al nostre abast. Per aprendre a resoldre aquests sistemes, podem fer servir dos mètodes diferents. I els haureu d'aprendre els dos!

<u>Resoldre el sistema d'equacions per substitució:</u>
Situem-nos, hem de resoldre aquest sistema d'equacions:

$$\begin{aligned} -8 &= 1089a + 33b \\ -15 &= 4900a + 70b \end{aligned}$$

Resoldre el sistema vol dir trobar un punt concret (a_0,b_0) que és solució de les dues equacions del sistema (gràficament és el punt on es tallen les dues rectes).

$$b = \frac{-8 - 1089a}{33}$$

Aïllem una incògnita d'una equació, per exemple, la **b** de la primera equació. Ens queda:
Per facilitar la manipulació de fraccions treballarem amb la seva expressió decimal:
(Equació 1)

$$b = -0.\widehat{24} - 33a$$

I això ho substituïm per la **b** de la segona equació del sistema. Ens queda:

$$-15 = 4900a + 70\left(-0.\widehat{24} - 33a\right)$$

Manipulem l'expressió pas a pas fins aïllar la **a**.

$$\begin{aligned} -15 &= 4900a - 16.\widehat{96} - 2310a \\ -2590a &= 1.\widehat{96} \\ a &= 0.007605008 \end{aligned}$$

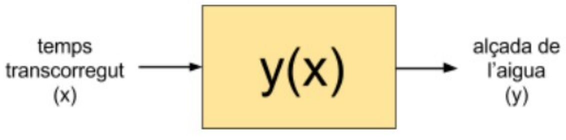
Ja tenim la **a**! Per obtenir la **b**, substituïm aquesta **a** a Equació 1. Fent els càlculs obtenim:

$$b = -0.\widehat{24} - 33 * 0.007605008$$
$$b = -0.2675207688$$

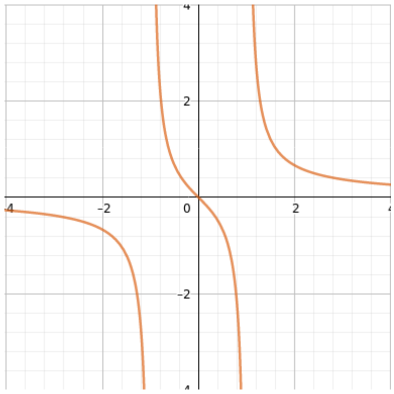
Doncs, tenim que:

$$a = 0.0007605008$$
$$b = 0.2675207675$$
$$c = 21$$

Ara hem de substituir els valors de les variables a, b i c a les nostres funcions.
Recordeu que **x** és el temps transcorregut (en segons) i la **y** l'alçada de l'aigua (en cm).
Si li diem quant temps ha passat l'expressió ens torna l'alçada de l'aigua. És màgia? No, són matemàtiques.

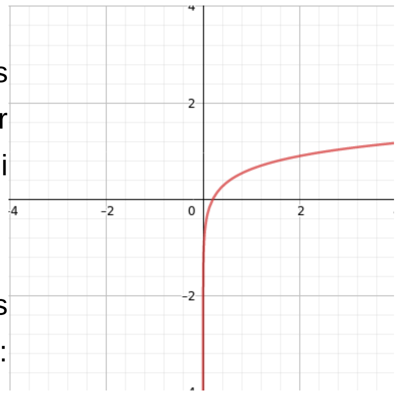


FUNCIÓ RACIONAL: $y = \dfrac{ax+b}{cx+1}$



Les funcions racionals es poden escriure com a quocients de dos polinomis. Com aquestes funcions poden ser molt diferents entre elles, us he concretat a una amb tres constants (a, b i c) per poder realitzar el mateix sistema que utilitzen amb les funcions quadràtiques. Les funcions racionals es poden utilitzar fàcilment per parlar del concepte de límit, és a dir cap a quin valor de y tendeix si assignem cada cop valors més grans a x.
Per tant, heu d'utilitzar el mateix mètode de substitució que amb les funcions quadràtiques.

FUNCIÓ LOGARÍTMICA: $y = a * \log_{10}(x) + b$



Les funcions logarítmiques són les inverses de les exponencials. Són utilitzades per exemple per visualitzar escales molt grans. Tenen només dos valors a concretar (a i b).

Per concretar els valors necessitem dos punts dels valors que hem trobat. Aquests valors són (x,y) en l'equació: $y = a * \log_{10}(x) + b$.

$(95,65) \rightarrow 65 = a * log_{10}(95) + b$
$(28,52) \rightarrow 52 = a * log_{10}(28) + b$

Tenim un sistema d'equacions amb dues variables. Aïllem la variable 'b'.

$b = 65 - a * log_{10}(95)$
$b = 52 - a * log_{10}(28)$

Igualem les equacions i aïllem la variable 'a'.

$$65 - a * log_{10}(95) = 52 - a * log_{10}(28)$$
$$65 - 52 = a * log_{10}(95) - a * log_{10}(28)$$
$$13 = a * log_{10}(95/28)$$
$$a = 13/log_{10}(95/28) = 24.50215513$$

Ja tenim el nostre primer valor. Substituïm a qualsevol de les dues equacions, i trobem el valor de la variable 'b'.

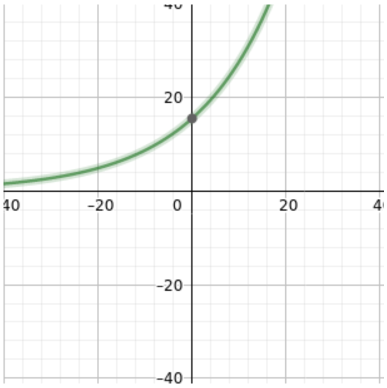
$65 = a * log_{10}(95) + b$
$65 = 24.50215513 * log_{10}(95) + b$
$b = 65 - 2450215513 * log_{10}(95) = 16.00322297$

Per tant, ja tenim els dos valors que buscàvem:

$a = 24.50215513$
$b = 16.00322297$

FUNCIONS EXPONENCIALS: $y = a * b^x$

Les funcions exponencials són les que la variable x és presenta a l'exponent. És la funció inversa de la funció logarítmica. El seu creixement és el més gran de totes les funcions que hem vist en aquest document.



Per concretar els valors, necessitem dos punts. En aquest cas, són freqüències de notes musicals.

$(2, 17.32) \to 17.32 = a * b^2$
$(106, 7040) \to 7040 = a * b^{106}$

Si aïllem la 'a' de les dues equacions:

$$a = \frac{17.32}{b^2}$$
$$a = \frac{7040}{b^{106}}$$

Igualem les expressions:

$$\frac{17.32}{b^2} = \frac{7040}{b^{106}}$$

Col·locant totes les 'b' a l'esquerra de l'equació:

$$\frac{b^{106}}{b^2} = \frac{7040}{17.32}$$
$$b^{104} = \frac{7040}{17.32}$$
$$b = \sqrt[104]{\frac{7040}{17.32}} = 1.059465396464722$$

Ara que ja coneixem el valor de la variable b, substituïm el seu valor a qualsevol de les dues equacions.

$$17.32 = a * 1.059465396464722^2$$
$$a = \frac{17.32}{1.059465396464722^2} = 15.4302987411818$$

Per tant, la funció exponencial ens queda com:

$$y = 15.4302987411818 * 1.059465396464722^x$$

Tot això també ho podem fer utilitzant les regressions. És més, seria la forma més adient de fer-ho, però, les regressions s'expliquen a batxillerat, encara i així les podeu utilitzar amb un full de càlcul.